CONCOURS D'ADMISSION

À

L'ÉCOLE MILITAIRE INTERARMES

EN 2012

CONCOURS E.M.I.A.

SCIENCES ÉCONOMIQUES ET SOCIALES

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Durée : 3 heures – Coefficient 10

Mercredi 25 janvier 2012 de 08h00 à 11h00

L'usage de la calculatrice électronique de poche – y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisée pendant les épreuves.

EXERCICE I

1) Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = 2+\frac{n}{2}$

1.1) Est-elle croissante ? bornée ? convergente ?

1.2) Que peut on dire de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_n = 3+\frac{1}{u_n}$

2) Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = 2-\frac{1}{2^n}$

2.1) Est-elle croissante ? bornée ? convergente ?

2.2) Soit la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ définie par $w_n = u_n - 2$, montrer que c'est une suite géométrique dont on précisera le premier terme w_0 et la raison r

2.3) soit la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ définie par $s_n = \sum_{i=0}^{n} w_i$, exprimer s_n en fonction de n ; comparer $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(s_n)_{n\geq 0}$

3) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante telle que $u_0 > 0$ et soit $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_n = 3+\frac{1}{u_n}$

3.1) la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ es-elle croissante, décroissante, convergente ?

3.2) si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ admet pour limite l que peut-on dire de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$?

3.3) si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ n'admet pas de limite que peut-on dire de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$?

EXERCICE II

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ 7 & -4 & -5 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et la matrice $B = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -7 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

1) Déterminer s'ils existent $M = A.A$; $N = M.A$; $P = AM$
puis $C = A.B$; $D = B.A$ et $E = M.B$

2) Déterminer les matrices X solutions de l'équation $MX = B$
(on pourra multiplier à gauche les deux membres de l'équation par A ; à justifier !)

3) Déterminer les matrices Y solutions de l'équation $AY = B$

EXERCICE III

1) Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 3x+2y-5=0 \\ 3y-2x+12=0 \end{cases}$$

2) Représenter graphiquement (papier millimétré) l'ensemble des solutions de

$$(3x+2y-5)(3y-2x+12)<0$$

(on choisira une échelle adaptée et on justifiera les constructions ainsi que le choix des domaines)

EXERCICE IV

Soit E l'ensemble des éventualités et soit U et V deux événements.
On note $p(U)$ la probabilité de U et $p_V(U)$ ou $p(U/V)$ la probabilité de U sachant V
On note $\overline{U}$ l'événement contraire de U

1) soit A tel que $p(A)=\dfrac{1}{3}$

soit B tel que $\begin{cases} p(B/A)=\dfrac{2}{5} \\ p(B/\overline{A})=a \end{cases}$, $a\in[0,1]$

1.1) déterminer en fonction de a : $p(A\cap\overline{B})$, $p(B)$ et $p(A/B)$

1.2) déterminer a pour que A et B soient indépendants

2) On dispose de 3 urnes :
- la première contient une boule blanche et deux boules noires
- la deuxième, blanche contient une boule blanche et 3 boules noires
- la troisième, noire contient une boule blanche et n boules noires

On tire une boule dans la première urne et on la place dans l'urne de la couleur de la boule tirée, puis dans cette dernière urne on tire une boule.
On admet que pour chaque tirage toutes les boules présentes dans l'urne ont la même probabilité d'être tirées :

- quelle la probabilité que les deux boules tirées soient de la même couleur
- est-il est possible de choisir n pour que l'événement *« la première boule tirée est blanche »* et l'événement *« les deux boules tirées sont de la même couleur »* soient indépendants. ?

Répondre aux questions posées en utilisant le modèle développé dans la première question.

EXERCICE V

Démontrer que :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x(x+\sqrt{x})}=1$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x+1)+\ln(x+3)-\ln(2x^2+5))=-\ln(2)$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x(e^{x+1}+e^{x-1}))=0$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x^2-1)}{x}\right)=0$

EXERCICE VI

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\ln|x|+2}{1-\ln|x|}$

1) Déterminer D_f , le domaine de définition de f ; la fonction f est-elle paire ? impaire ?

2) Soit $\Re$ l'ensemble des réels et φ l'application définie de D_f dans $\Re$ par

$$\forall x\in D_f,\varphi(x)=f(x)$$

2.1) φ est-elle injective ?

2.2) Déterminer en fonction de m le nombre de solutions en x de l'équation : $f(x)=m$.
φ est-elle surjective ?

3) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f

4) Déterminer la dérivée f' de f ; en déduire le tableau de variations de f

5) Soit l'ensemble $A = D_f \cap [0,+\infty[$ et l'ensemble $B =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$; soit l'application ψ définie de A dans B par

$$\forall x \in A, \psi(x) = f(x)$$

et soit l'application g définie de B dans A par

$$g(x) = e^{\frac{x-2}{1+x}}$$

déterminer $g \circ \psi$ et $\psi \circ g$; les applications g et ψ sont-elles bijectives ?