CONCOURS D'ADMISSION

À

L'ÉCOLE MILITAIRE INTERARMES

EN 2012

CONCOURS E.M.I.A. SCIENCES

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES & D'ANALYSE DE PROCESSUS

Durée : 4 heures – Coefficient 14

Mercredi 25 janvier 2012 de 08h00 à 12h00

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés pour cette épreuve.

L'attention des candidats est attirée sur l'importance d'une bonne rédaction. Les copies satisfaisantes dans ce domaine seront valorisées.

Exercice 1.

On considère le polynôme $P(z)$ suivant :

$$P(z) = z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$$

1. Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(i\alpha) = 0$.
2. Déterminer les nombres a, b et c tels que $P(z) = (z - i\alpha)(az^2 + bz + c)$
3. Déterminer toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 2.

Soit g et h les fonctions définies par :

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = 1 + \ln x, \qquad \text{pour tout } x \in]0,+\infty[.$$

On note par C_g et C_h les courbes représentatives des fonctions g et h dans un repère orthonormal.

1. Déterminer les tableaux de variations de g et de h.
2. Soit P le point d'intersection de la courbe C_h et de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées du point P.
3. Tracer leurs courbes représentatives C_g et C_h dans un même repère en précisant leurs points d'intersection.
4. Montrer que la fonction H définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $H(x) = x \ln x$ est une primitive de la fonction h sur cet intervalle.
5. Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes C_g, C_h et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = 1$.
6. Soit t un nombre réel de l'intervalle $]1,+\infty[$. On note par $B(t)$ l'aire du domaine délimité par les courbes C_g, C_h et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = t$. Calculer $B(t)$.

Exercice 3.

On note par $P_B(A)$ ou $P(A/B)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B et par $\overline{A}$ l'événement contraire.

Deux pour cent des pièces fabriquées dans un atelier étant défectueuses. On décide de contrôler les pièces de la production. Le procédé de contrôle est tel que :

- Si la pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de 0,99;
- Si la pièce est défectueuse, elle est refusée avec une probabilité de 0,98.

On note par D l'évènement défini par « La pièce choisie est défectueuse » et par A l'évènement « La pièce choisie est acceptée »

1- Donner les probabilités suivantes : $P(D)$, $P_{\overline{D}}(A)$ et $P_D\left(\overline{A}\right)$.

2- On considère les deux événements E_1 défini par « la pièce est défectueuse et la pièce est acceptée » et E_2 défini par «la pièce est bonne et la pièce est refusée ».

   - Exprimer E_1 et E_2 en fonction de A et D
   - Calculer la probabilité de l'événement E_1.
   - Calculer la probabilité de l'événement E_2.

3- On note par E l'évènement «Il y a erreur dans le contrôle ». Exprimer E en fonction de E_1 et E_2. Calculer $P(E)$.

4- Calculer la probabilité pour que la pièce soit bonne sachant qu'elle a été refusée.

Exercice 4.

Soit l'équation d'inconnue réelle x :

$$\left(E_\mu\right) \qquad x^3-x^2+\mu=0$$

où μ désigne un paramètre réel.

1- On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=x^3-x^2+\mu \ , \qquad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}.$$

Déterminer le tableau de variations de f.

2- Démontrer que l'équation $\left(E_\mu\right)$ admet trois solutions réelles distinctes si, et seulement si $\mu\in\left]0,\frac{4}{27}\right[$.

3- On suppose que $\mu=\frac{4}{27}$. Résoudre l'équation $\left(E_\mu\right)$.

4- Déterminer les solutions réelles de l'équation $\left(E_\mu\right)$ lorsque l'une d'entre elles est double.

Exercice 5.

On considère $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

1. Démontrer qu'il existe, pour tout entier naturel n non nul, deux réels α_n et β_n tels que :

$$A^n=\alpha_n I+\beta_n J$$

2. Calculer A^{n+1} en fonction de α_n, β_n, I et J.
3. Déterminer α_{n+1} en fonction de α_n puis en fonction de n.
4. Ecrire β_{n+1} en fonction de α_n et de β_n.

5. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{\beta_n}{\alpha_n}$.

- Montrer que la suite (u_n) est une suite arithmétique.
- En déduire u_n puis β_n en fonction de n.

6. Ecrire A^n en fonction de n.

Analyse de processus

1- Ecrire un algorithme de calcul de $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$, où n est un entier naturel.

2- En déduire un algorithme qui, pour un entier naturel n, retourne la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

*On dispose des opérations élémentaires +, * et /. Le reste de la division euclidienne d'un entier k par 2 pourra être utilisé et sera noté "$k \bmod 2$", on dispose aussi de $k!$ qui sera noté "$fact(k)$".*

3- On cherche à améliorer l'algorithme de la question précédente. On considère alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -\dfrac{u_{n-1}}{n}$.

a. Démontrer que $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

b. En déduire un algorithme qui, pour un entier naturel n, permet de calculer S_n sans utiliser "$fact(.)$".